

# Correzione della prova parziale del 19-03-2009

Davide Taviani

23 marzo 2009

## 1

Dimostrare che l'applicazione

$$f : \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{Z}$$
$$(9x + 90\mathbb{Z}, 10y + 90\mathbb{Z}) \mapsto 9x + 10y + 90\mathbb{Z}$$

è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi.

### 1.1 Dimostrazione diretta

Siano  $v = (9a + 90\mathbb{Z}, 10b + 90\mathbb{Z})$ ,  $v' = (9a' + 90\mathbb{Z}, 10b' + 90\mathbb{Z})$ , con  $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$

1. È l'applicazione ben definita?

$$\text{Se } v = v', f(v) \stackrel{?}{=} f(v')$$

$v = v'$  implica che siano uguali la prima coordinata e la seconda coordinata, cioè

- $9a + 90\mathbb{Z} = 9a' + 90\mathbb{Z}$ , cioè  $9a \equiv 9a' \pmod{90\mathbb{Z}}$ , quindi  $9a - 9a' \in 90\mathbb{Z}$
- $10b + 90\mathbb{Z} = 10b' + 90\mathbb{Z}$ , cioè  $10b \equiv 10b' \pmod{90\mathbb{Z}}$ , quindi  $10b - 10b' \in 90\mathbb{Z}$

Quindi

$$\begin{aligned} f(v) = f(v') &\iff 9a + 10b + 90\mathbb{Z} = 9a' + 10b' + 90\mathbb{Z} \\ &\iff 9a + 10b \equiv 9a' + 10b' \pmod{90\mathbb{Z}} \\ &\iff 9a + 10b - (9a' + 10b') \in 90\mathbb{Z} \\ &\iff 9a - 9a' + 10b - 10b' \in 90\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ma poiché per ipotesi  $9a - 9a' \in 90\mathbb{Z}$  e  $10b - 10b' \in 90\mathbb{Z}$ , anche  $9a - 9a' + 10b - 10b' \in 90\mathbb{Z}$  e quindi  $f$  è ben definita.

2.  $f$  è morfismo, cioè  $f(v + v') \stackrel{?}{=} f(v) + f(v')$

$$\begin{aligned}
f(v + v') &= f((9a + 90\mathbb{Z}, 10b + 90\mathbb{Z}) + (9a' + 90\mathbb{Z}, 10b' + 90\mathbb{Z})) \\
&= f((9a + 90\mathbb{Z} + 9a' + 90\mathbb{Z}, 10b + 90\mathbb{Z} + 10b' + 90\mathbb{Z})) \\
&= f((9a + 9a' + 90\mathbb{Z}, 10b + 10b' + 90\mathbb{Z})) \\
&= 9a + 9a' + 10b + 10b' + 90\mathbb{Z} \\
&= 9a + 10b + 90\mathbb{Z} + 9a' + 10b' + 90\mathbb{Z} \\
&= f(v) + f(v')
\end{aligned}$$

3.  $f$  è suriettivo?

Siano  $m + 90\mathbb{Z} \in \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$  e  $n + 90\mathbb{Z} \in \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$ , cioè

- $m = 9p + 90\mathbb{Z}$ , con  $p \in \mathbb{Z}$
- $n = 10q + 90\mathbb{Z}$  con  $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
Im(f) &= \left\{ a \in \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \mid a = f((m + 90\mathbb{Z}, n + 90\mathbb{Z})) \right\} \\
&= \left\{ a \in \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \mid a = f((9p + 90\mathbb{Z}, 10q + 90\mathbb{Z})) \right\} \\
&= \left\{ a \in \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \mid a = 9p + 10q + 90\mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

Poiché  $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9p + 10q \in \mathbb{Z}$ , si ha che esiste un  $t \in \mathbb{Z}$  tale che  $t = 9p + 10q$ .

In conclusione

$$Im(f) = \left\{ a \in \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \mid a = t + 90\mathbb{Z}, \text{ con } t \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$$

Pertanto  $f$  è suriettiva.

$$4. \left| \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right| \stackrel{?}{=} \left| \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right|$$

- $\left| \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right| = 90$
- $\left| \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right| = \left| \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right| \cdot \left| \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \right| = 10 \cdot 9 = 90$

Poiché  $f$  è un morfismo di gruppi ben definito e suriettivo, fra due gruppi che hanno la stessa cardinalità, per un corollario del principio dei cassetti, questo è anche iniettivo e quindi biiettivo.  $\diamond$

## 1.2 Dimostrazione con il primo teorema di isomorfismo

Sia  $\phi$  la seguente applicazione:

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z} &\rightarrow \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \\ a &\mapsto (9a + 90\mathbb{Z}, 10a + 90\mathbb{Z})\end{aligned}$$

1. È  $\phi$  ben definita? Cioè, se  $a = b$ ,  $\phi(a) \stackrel{?}{=} \phi(b)$   
 $\phi(a) = (9a + 90\mathbb{Z}, 10a + 90\mathbb{Z}) = (9b + 90\mathbb{Z}, 10b + 90\mathbb{Z}) = \phi(b)$   
Pertanto  $\phi$  è ben definita.
2. È un morfismo? Cioè  $\phi(a + b) \stackrel{?}{=} \phi(a) + \phi(b)$

$$\begin{aligned}\phi(a + b) &= (9(a + b) + 90\mathbb{Z}, 10(a + b) + 90\mathbb{Z}) \\ &= (9a + 9b + 90\mathbb{Z}, 10a + 10b + 90\mathbb{Z}) \\ &= (9a + 90\mathbb{Z}, 10a + 90\mathbb{Z}) + (9b + 90\mathbb{Z}, 10b + 90\mathbb{Z}) \\ &= \phi(a) + \phi(b)\end{aligned}$$

3.  $\text{Ker}(\phi) \stackrel{?}{=} 90\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\phi) &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \phi(a) = (0 + 90\mathbb{Z}, 0 + 90\mathbb{Z})\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid (9a + 90\mathbb{Z}, 10a + 90\mathbb{Z}) = (0 + 90\mathbb{Z}, 0 + 90\mathbb{Z})\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 9a \equiv 0 \pmod{90\mathbb{Z}} \text{ e } 10a \equiv 0 \pmod{90\mathbb{Z}}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 9a \in 90\mathbb{Z} \text{ e } 10a \in 90\mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{esistono } q, t \in \mathbb{Z} \text{ tali che } 9a = 90t \text{ e } 10a = 90q\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{esistono } q, t \in \mathbb{Z} \text{ tali che } a = 10t \text{ e } a = 9q\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 10\mathbb{Z} \text{ e } a \in 9\mathbb{Z}\} \\ &= 9\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = 90\mathbb{Z}\end{aligned}$$

4.  $\phi$  è suriettiva?

Ovvero, sia  $x \in \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$ , cioè esistono  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $x = (9m + 90\mathbb{Z}, 10n + 90\mathbb{Z})$ , esiste un  $p \in \mathbb{Z}$  tale che  $x = \phi(p)$ ?

Questo  $p \in \mathbb{Z}$  deve rispettare le seguenti condizioni

- $9p + 90\mathbb{Z} = 9m + 90\mathbb{Z}$ , cioè  $p - m \in 10\mathbb{Z}$
- $10p + 90\mathbb{Z} = 10n + 90\mathbb{Z}$ , cioè  $p - n \in 9\mathbb{Z}$

Quindi  $p = 10n - 9m$ .

Infatti si ha che  $\phi(10n - 9m) = (9m + 90\mathbb{Z}, 10n + 90\mathbb{Z})$

Pertanto,  $\phi$  è suriettiva.

Poiché  $\phi$  è un morfismo di gruppi suriettivo, il cui nucleo è  $90\mathbb{Z}$ , applicando il primo teorema di isomorfismo si ha che:

$$\frac{\mathbb{Z}}{\text{Ker}(\phi)} \cong \text{Im}(\phi) \implies \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \cong \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$$

◇

### 1.3 Dimostrazione dedotta dalla generale (Es. 15.30)

Siano  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , e sia  $MCD(m, n) = 1$ .

#### 1.3.1 Dimostrare che

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \times \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$$

1.  $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} + \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \stackrel{?}{=} \frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$   
 $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} + \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{(MCD(m, n))\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$
2.  $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cap \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \stackrel{?}{=} 0 + mn\mathbb{Z}$   
 $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cap \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{(mcm(m, n))\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{mn\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = 0 + mn\mathbb{Z}$
3.  $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}, \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \stackrel{?}{\triangleleft} \frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$

Questi due sottogruppi sono normali perché sono sottogruppi di  $\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$ , che è un gruppo abeliano.

Quindi  $\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} = \frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \times \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$ .

◇

#### 1.3.2 Dedurre che

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$$

Dal punto precedente, e per la definizione di prodotto diretto interno, si ha che:

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cong \frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \times \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$$

- $\frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$ , è isomorfo a  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  per l'esercizio 13.16
- $\frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$ , è isomorfo a  $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$  per l'esercizio 13.16

Quindi

$$\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cong \frac{m\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \times \frac{n\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$$

◇

### 1.3.3 Dimostrazione dell'enunciato con questi risultati

$$\frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \stackrel{?}{=} \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$$

- $\frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} + \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \stackrel{?}{=} \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$   
 $\frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} + \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{9\mathbb{Z} + 10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{(MCD(9,10))\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$
- $\frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \cap \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \stackrel{?}{=} \frac{90\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$   
 $\frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \cap \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{9\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{(mcm(9,10))\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{90\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$
- $\frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}, \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \triangleleft \frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$

Questi due sottogruppi sono normali perché  $\frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$  è abeliano.

Quindi si conclude che  $\frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$  e, per il risultato precedente,

$$\frac{\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \cong \frac{9\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \times \frac{10\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$$

◇

## 2 Determinare i generatori di $\frac{6\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$

$\frac{6\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} = \langle t + 90\mathbb{Z} \rangle$ , dove  $6 = MCD(t, 90)$ .

Quindi i generatori di  $\frac{6\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}}$  sono:

- $6 + 90\mathbb{Z}$
- $12 + 90\mathbb{Z}$
- $24 + 90\mathbb{Z}$
- $42 + 90\mathbb{Z}$
- $48 + 90\mathbb{Z}$
- $66 + 90\mathbb{Z}$
- $78 + 90\mathbb{Z}$
- $84 + 90\mathbb{Z}$

In altro modo, si poteva vedere che  $\frac{6\mathbb{Z}}{90\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}} \dots$

### 3 Sia $G$ un gruppo finito con $|G| = 12$

#### 3.1 Dimostrare che se $G$ non ha un sottogruppo normale di ordine 3, allora ne ha uno di ordine 4

**Svolgimento.** <sup>1</sup>

Si ha che  $|G \setminus T_3| = 4$ .

Sia  $P^2$  un Sylow 2-sottogruppo di  $G$ . Allora  $|P^2| = 2^2$ , cioè la massima potenza di 2 che divide  $|G|$ .

Sia  $x \in P^2$ , allora  $o_G(x) = |\langle x \rangle|$  divide  $|P^2| = 2^2$ ; per questo motivo  $o_G(x) \neq 3$ , e quindi  $x \in G \setminus T_3$ . Se ne conclude che  $P^2 \subseteq (G \setminus T_3)$ , ma  $|P^2| = 4 = |G \setminus T_3|$ , quindi  $P^2 = (G \setminus T_3)$ .

Dunque  $G$  ha un unico Sylow 2-sottogruppo, che è normale.  $\diamond$

#### 3.2 Determinare due gruppi abeliani non isomorfi aventi cardinalità 12

Considero  $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$  e  $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

- Entrambi i gruppi sono abeliani.

- $\left| \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \right| = 12 = \left| \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \right|$

- Dimostrazione che non sono isomorfi:

Si supponga per assurdo che lo siano, quindi esiste in particolare il seguente isomorfismo:

$$\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

Quindi  $f(1 + 12\mathbb{Z}) = (a + 6\mathbb{Z}, b + 2\mathbb{Z})$  con  $a \in \{1, \dots, 6\}$  e  $b \in \{0, 1\}$

Si consideri pertanto:

$$\begin{aligned} \underbrace{f(1 + 12\mathbb{Z}) + \dots + f(1 + 12\mathbb{Z})}_{6 \text{ volte}} &= f(6 + 12\mathbb{Z}) \\ &= (6a + 6\mathbb{Z}, 6b + 2\mathbb{Z}) \\ &= (0 + 6\mathbb{Z}, 0 + 2\mathbb{Z}) \\ &= f(0 + 12\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ma ciò è assurdo perché  $6 + 12\mathbb{Z} \neq 0 + 12\mathbb{Z}$ !

Quindi i due gruppi non sono isomorfi.  $\diamond$

---

<sup>1</sup>È stata omessa la parte dell'esercizio correttamente svolta nella prova

**3.3 Determinare un gruppo  $\Gamma$  non abeliano, di cardinalità 12, avente un sottogruppo normale di cardinalità 4. Determinare i Sylow 3-sottogruppi**

. Si consideri  $A_4$ , ovvero il *sottogruppo alterno* di  $S_4$ , e  $V$ , il *Vierergruppe*.

- $A_4 = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (134), (143), (124), (142), (243), (234)\}$
- $V = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$|V| = 4$  ed è normale in  $A_4$ .

I Sylow 3-sottogruppi di  $A_4$  sono:

- $\Gamma_1 = \{1, (123), (132)\} = \langle (123) \rangle = A_3$
- $\Gamma_2 = \{1, (124), (142)\} = \langle (124) \rangle$
- $\Gamma_3 = \{1, (134), (143)\} = \langle (134) \rangle$
- $\Gamma_4 = \{1, (234), (243)\} = \langle (234) \rangle$

◇